正の不変測度について : 関連問題としてのLocal Parallel Flowの理論を含めて (力学系の総合的研究)

江川, 治朗

数理解析研究所講究録
173巻 1973年 114-127

正の不変測度について
―関連問題としての local parallel flow の理論を含めて―

神大 工学部 江 川 治 朗

§1. 序

位相空間X上の測度μがX上の力学系πに関して不変測度であるとは，任意のμ－可測集合$A \subset X$と任意の$t \in R^1$に対して，

$$\mu(\pi(A, t)) = \mu(A)$$

が成り立つことであることはよく知られている。本講演では，この定義を局所力学系に拡張し，R^2（又はS^2，又はそれ等の開集合）上の特異点が有限個であるような局所力学系に対して，正の不変測度（後述）の存在について，局所的又は大域的な考察をする。不変測度について，次の定理が知られている。

定理 A.（E. Hopf, [6]）. 可算基を持つ局所コンパクト空間X上の力学系πが任意のコンパクト集合上で有限な値をとる不変測度を持つとする。このとき，ほとんどすべて

の点 $x \in X$ で，x を通る軌道は Poisson stable か departing である。

定理 B（N. Kryloff, N. Bogoliuboff,〔6〕）．相空間がコンパクトな力学系は常に不変測度を持つ。

定理 C（J. C. Oxtoby, S. M. Ulam,〔8〕）．完備な距離空間 X 上の力学系 π が有限な不変測度を持つための必要十分条件は

$$\overline{\lim_{\tau\to\infty}}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \Phi_K(\pi(x,t))\,dt > 0$$

であるようなコンパクト集合 $K \subset X$ と点 $x \in X$ が存在することである。こゝで Φ_K は K の特性関数である。

定理 (A)〜(C) にいう測度は一般に空でない開集合の上で正の値をとるとは限らない。こゝでは，次の 2 条件を満たすルベック測度のみ考察する。

(1) 任意の空でない開集合の測度は正。

(2) 任意のコンパクト集合の測度は有限.

上の条件を満足する（不変）測度を正の（不変）測度ということにする。このような測度の存在について，J. C. Oxtoby はトーラス上の Stepanov flow について議論した（〔7〕）。今後測度といえば，常に正の測度を考えることにする。

主な結果は次の通りである。

〔1〕 局所的問題.

π を X ($=R^2$, S^2, 又はそれ等の開集合) 上で定義された局所力学系とする。

(i)　$x\in X$ が特異点でなければ，x の近傍で不変測度が存在する。

(ii)　$x\in X$ を孤立特異点とする。このとき，x の近傍で不変測度が存在するための必要十分条件は，x が Poincaré center か Generalized saddle であることである。

〔2〕　大域的問題

(i)　π を R^2 上の局所力学系とする。

(イ)　π が特異点を持たないならば，常に不変測度が存在する。

(ロ)　π が有限個の特異点を持つとする。このとき，不変測度が存在するための必要十分条件は，有限個の軌道を除いて，周期軌道であるか，departing であることである。

(ii)　π を R^2 又は S^2 上の特異点が有限個の力学系とする。π に関しての有限不変測度が存在するための必要十分条件は，有限個の軌道を除いて周期軌道であることである。

〔1〕，〔2〕の証明の概略を述べるのであるが，そのためには local parallel flow の議論が必要なので，これについても述べる。§2で基本概念を説明し，§3で local parallel flow について議論する。§4と§5で不変測度の存在につ

いて考察する。

§2. 基本概念.

まず記号，ことばの説明をする。πを位相空間X上の局所力学系とする。$x\in X$に対して，

$C(x)$: x を通る軌道.

$L^+(x)\,(L^-(x))$: xの$+(-)$ limit set.

$J^+(x)\,(J^-(x))$: xの$+(-)$ prolongational limit set.

S_π : 特異点の集合

P_π : 周期点の集合.

$U\subset X$を開集合とするとき，πのUへの制限を$\pi|U$とかく（〔2〕,〔4〕,〔13〕）。

Remark. $J^+(x)$は力学系に対しては,

$$J^+(x)=\bigcap_{\substack{V\in\mathcal{V}(x)\\ a\in[0,\infty)}}\overline{\pi(V,[a,\infty))}$$

で定義される（〔3〕）。こゝで$\mathcal{V}(x)$はxの近傍のfilter。これの局所力学系への拡張を次のようにする。

$$J^+(x)=\bigcap_{\substack{V\in\mathcal{V}(x)\\ a<b_x}}\overline{\pi(V,[a,\infty))}$$

で定義する。こゝで $\pi(V,[a,\infty))=\{y\mid {}^\exists x'\in V,{}^\exists t\in[a,\infty),\ \pi(x',t)=y\}$, b_xはxの$+$ escape timeである。Xが第一可附番公理を満

たす場合に，これ等を点列であらわすと，力学系では

$$J^+(x)=\{y \mid {}^\exists\{x_n\},{}^\exists\{t_n\},\ x_n\to x,\ t_n\to\infty,\ \pi(x_n,t_n)\to y\}。$$

局所力学系では，

$$J^+(x)=\{y \mid {}^\exists\{x_n\},{}^\exists\{t_n\},\ x_n\to x,\ \varliminf_{n\to\infty} t_n \geqq b_x,\ \pi(x_n,t_n)\to y\}.$$

とあらわされる。

任意の点 $x\in X$ に対して，$x\notin J^+(x)$ のとき，π を completely unstable flow，$J^+(x)=\phi$ のとき π を dispersive flow という。$M\subset X$ が任意の $x\in M$ に対して，$C(x)\subset M$ のとき，M を準不変集合という。（$\pi|M$ が力学系を定めるとき，単に不変集合という。）

定義 2．1． X 上の測度 μ が次の条件 (*) を満足するとき，μ を π に関しての不変測度であるという。

(*) 任意の μ－可測集合 $A\subset X$ と任意の $t\in R^1$ に対して，すべての $x\in A$ に対して $\pi(x,t)$ が定義されている限り，

$$\mu(\pi(A,t))=\mu(A)$$

が成り立つ。

特に $\mu(X)<\infty$ のとき，μ を有限不変測度という。

定義 2．2． $x\in X$ とする。$\pi|U$ が不変測度を持つような x の近傍 U が存在するとき，π は x の近傍で不変測度が存在するという。

定義 2．3． π，ρ を X，Y 上の局所力学系とする。

πからρへのNS同型写像，又はtype-n GH同型写像が存在するとき，πとρはそれぞれ，NS-同型，又はtype-n同型であるという。

定理2．4．　不変測度の存在については，type 0同型で不変である。

§3．　Local parallel flows.

πを位相空間X上の局所力学系とする。

定義3．1．　次の条件(1)，(2)を満足するとき，πをX上のlocal parallel flowという。

(1)　$X = \bigcup_{s \in S} \{s\} \times X_s$，

こゝで，Sは位相空間，$X_s = (m_s, n_s)$は0を含む開区間。

(2)　$t_1 \in X_s$，$t_1 + t_2 \in X_s$なる任意のt_1，t_2に対して，

$$\pi((s, t_1), t_2) = (s, t_1 + t_2).$$

特に$X = S \times R^1$のとき，πを単にparallel flowという。又Sをπのsectionという。

定義3．2．　πが(local) parallel flowとNS又はtype-n同型であるとき，πはNS又はtype-n globally (locally) parallelizableであるという。

定義3．3．　$x \in X$の近傍Vで$\pi|V$がtype-n locally (globally) parallelizableであるような準不変集合が存在す

るとき，π は x で type-n locally (globally) parallelizable であるという。

定理 3．4．　π が type-n locally parallelizable ならば，type-0 locally parallelizable である。

上の定理より，locally parallelizability については，type number に関係しない。従って，これについての type number は省略する。次に globally parallelizability については，次の Vinograd's Theorem の拡張が必要なので，記しておく。

定理 3．5．(Vinograd-Carlson の定理の拡張)．　X を正規で可算パラコンパクト空間とする。このとき，π と type-4 同型（恒等写像が phase mapping）な力学系 π^* が存在する。

定理 3．6．　Section S を持つ任意の local parallel flow が parallel flow と type-4 同型であるための必要十分条件は，S が perfectly normal であることである。

定理 3．7．　X を正規で可算パラコンパクト空間とする。このとき，π が locally parallelizable ならば，π は type-4 globally parallelizable である。

定理 3．8（[10]）．　X を完全正則空間，$x \in X$ とする。$x \in X$ が正則点であるならば，$\pi|V$ が locally parallelizable な x の近傍 V が存在する。

定理 3・9． Xを完全正則空間，$x \in X$とする。このとき，πがxで locally parallelizable であるための必要十分条件は，$x \notin J^{+}(x)$である。

定理 3・10． Xを局所コンパクト，リンデレェフ空間とする。このとき，πが locally parallelizable であるための必要十分条件は，πが dispersive であることである。

次に (local) parallel flow の同型問題を考える。まず，parallel flow については次の定理が得られる。

定理 3・11． π_1を$X_1 = S_1 \times R^1$，π_2を$X_2 = S_2 \times R^1$上の parallel flow とする。このとき，次の4条件は同値である。

(1) π_1とπ_2は NS 同型である。

(2) π_1とπ_2は type-n 同型である。

(3) π_1とπ_2は type-0 同型である。

(4) S_1とS_2は位相同型である。

Remark. R^4では互いに同型でない parallel flow が uncountable に存在する。

定理 3・12． π_1，π_2を section S_1，S_2を持つX_1，X_2上の local parallel flow とする。S_1，S_2が perfectly normal 又はX_1，X_2が正規で可算パラコンパクトであるとき，次の3条件は同値である。

(1)　π_1 と π_2 は NS 同型である。

(2)　π_1 と π_2 は type-4 同型である。

(3)　S_1 と S_2 は位相同型である。

Remark.　(2)において，type-4 同型であって一般には type-number を変えることはできない（escape time によって特徴ずけられる。），又 (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) に対しては，空間上への仮定は不用であるが (3) $\Rightarrow$ (2) に対してはこの仮定がいる。

次に不変測度については次の定理が得られる。

定理 3・13.　π を section S を持つ X 上の local parallel flow とする。このとき，S が測度を持てば，π は不変測度 μ を持つ。特に，π が力学系のときは $\mu(X)=\infty$ である。

§4における2次元センターの場合に必要なので，次の定義を導入する。

定義 3・14.　π が次の条件を満たすとき，π を X 上の cylindroidally parallel flow という。

(1)　$X = \bigcup_{s \in S} \{s\} \times [0, f(s))$,

こゝで，S は位相空間，f は S から $(0, \infty)$ への連続関数。

(2)　任意の $(s, r) \in X$，任意の $t \in R^1$ に対して，

$\pi((s, r), t) = (s, t')$,

こゝで，$0 \leq t' < f(s)$，$t' \equiv r + t \mod f(s)$。

S を parallel flow のときと同様 section と呼ぶ。

定理 3・15. π を section S を持つ cylindroidally parallel flow とする。このとき S が（有限）測度を持てば，π は（有限）不変測度を持つ。

§4. 局所的考察

π を X ($= R^2$, S^2 又はそれ等の開集合）上の局所力学系とする。$x \in X$ を孤立特異点とする。$V \subset P_\pi$ であるような x の近傍 V が存在するとき，x を Poincaré center という。又 x の近傍 V で $C_x = \{ y \in V - \{x\} \mid L^+(y) = \{x\}$ 又は $L^-(y) = \{x\} \}$ が空でなく有限個の軌道よりなるものが存在するとき，x を Generalized saddle であるという。

命題 4・1.（[5]）. $x \in X$ が Poincaré center であるならば，$\pi | V - \{x\}$ が cylindroidally parallel flow と同型であるような x の近傍 V が存在する。

命題 4・2（[5], [10]）. 命題 4・1，定理 3・8，3・9 において，section は $(0, 1)$ と位相同型にとれる。

今までの議論より次の定理 4・3 が得られる。

定理 4・3. $x \in X$ が正則点であるならば，π は x の近傍で不変測度を持つ。

命題4・4．　$x \in X$ が generalized saddle であるならば，$\pi | V - C_x - \{x\}$ が completely unstable であるような x の近傍 V が存在する。

命題4・5．　π が completely unstable であるならば，π は不変測度を持つ。

定理4・6．（[11]）．　孤立特異点 $x \in X$ の近傍で不変測度が存在するならば，x は Poincaré center か generalized saddle である。

逆に命題4.1，4.2，4.4，4.5，定理3.15より次の定理を得る。

定理4・7．　$x \in X$ が Poincaré center か Generalized saddle であるならば，x の近傍で不変測度が存在する。

§5．　大域的考察．

π を R^2 上の局所力学系とする。

命題5・1．　π が特異点を持たなければ，π は completely unstable である。

命題4・5，5・1より次の定理を得る。

定理5・2．　π が特異点を持たなければ，π は不変測度を持つ。

命題5・3．　$M \subset X$ を π の準不変閉集合とする。$M \subset R^2$

ならば，$\pi|M$ は有限不変測度を持つ。

定理 5・4.　π が有限個の特異点を持つとする。このとき，次の3条件は同値である。

(1)　π は不変測度を持つ。

(2)　$C=\{x\in R^2 \mid x\notin P_\pi,\ L^+(x)\neq\phi \cap L^-(x)\neq\phi\}$ は有限個の軌道より成る。

(3)　(i)　特異点はすべて Poincaré Center か Generalized saddle である。

(ii)　$x\notin P_\pi$ に対して，$L^+(x)$，$L^-(x)$ は2点以上含むことはない。

証明.　(2) $\Leftrightarrow$ (3) は π が R^2 上の局所力学系であることから導かれる。(1) $\Rightarrow$ (3) は §4 の局所的考察から推察される。(2) $\Rightarrow$ (1)：$X_1=P_\pi-S_\pi$，$X_2=\{x\in R^2 \mid L^+(x)=\phi,\ L^-(x)=\phi\}$ とおくと，仮定より X_1，X_2 は R^2 の開集合で $X_1\cup X_2$ は R^2 で dense であることが示される。さらに，$\pi|X_2$ は completely unstable である。$X_1\subset P_\pi-S_\pi$ であるから，命題 5・3 より，$\pi|X_1$ は有限不変測度 μ_1 を持つ。又命題 4・5 より，$\pi|X_2$ は不変測度 μ_2 を持つ。任意のルベック可測集合 $A\subset R^2$ に対して，

$$\mu(A)=\mu_1(A\cap X_1)+\mu_2(A\cap X_2)$$

と置くと求めるものである。

次に有限測度については，前定理において，定理3・13を考慮すると，$X_2=\phi$ であることが示される。従って次の定理を得る。

定理5・5. π を S^2 又は R^2 上の力学系とする。このとき，π が有限不変測度を持つための必要十分条件は，R^2-P_π (S^2-P_π) が有限個の軌道よりなることである。

REFERENCES

[1] Egawa,J., Global Parallelizability of Local Dynamical Systems, Math. Syst. Theory, 6 (1972), 133-144.

[2] Egawa,J., Invariant Positive Measures for Flows in the Plane, Funkcial. Ekvac., 15 (1972), 23-38.

[3] Bhatia,N.P. and Szegö,G.P., Stability Theory of Dynamical Systems, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1970.

[4] Kimura,I., Categories of Local Dynamical Systems,(to appear).

[5] McCann, C.R., A Classification of Centers, Pacific J. Math. 30 (1969), 733-746.

[6] Nemytskii,V.V. and Stepanov, V.V., Qualitative Theory of Differential Equations, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1960.

[7] Oxtoby, J.C., Stepanoff Flow on the Torus, Proc. Amer.

Math. Soc., 4 (1953), (82-987.

[8] Oxtoby, J.C. and Ulam, S.M., On the Existence of a Measure Invariant under a Transformation, Ann. of Math., 40(1939), 560-566.

[9] Hajek, O., Parallelizability Revisited, Proc. of Amer. Math. Soc., 27(1971), 77-84.

[10] Hajek, O., Dynamical Systems in the Plane, Academic Press, London and New York, 1968.

[11] Ura, T., and Hirasawa, Y., Sur les Point Singuliers des Equations Différentielles Admettant un Invariant Intégral, Proc. Japan Acad., 30 (1954), 726-730.

[12] Ura, T., Isomorphism and Local Characterization of Local Dynamical Systems, Funkcial. Ekvac., 12 (1969), 99-122.

[13] Ura, T., Local Dynamical Systems and Their Isomorphisms, Proc. of Japan-U.S. Seminar on Ordinary Differential and Functional Equations, Lecture Notes in Math., Vol.243, 76-90, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

[14] Ura, T. and Egawa, J., Isomorphism and Parallelizability in Dynamical Systems Theory, Math. Syst. Theory, 7(1973), (in print).